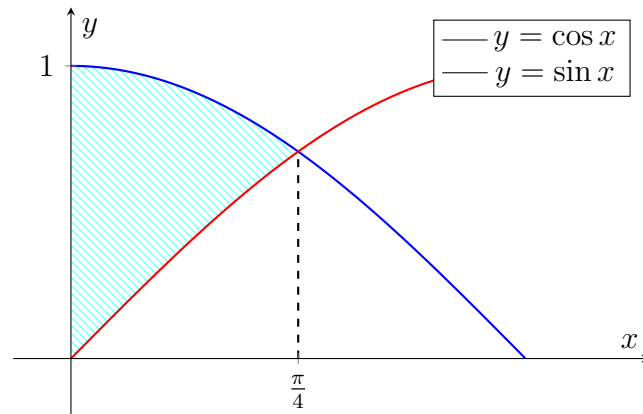


Soal Kuis 2 Kalkulus 2 (43)

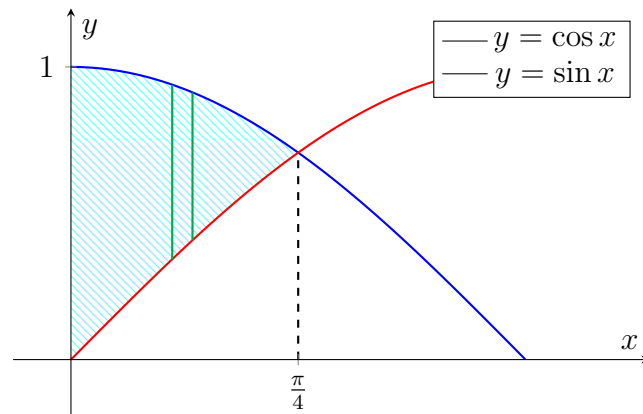
1. Tentukan volume benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh $y = \cos x$, $y = \sin x$, $x = 0$, dan $x = \frac{\pi}{4}$ diputar terhadap sumbu- x .
2. Dapatkan luas permukaan yang dibentuk dari kurva $y = \sqrt{16 - x^2}$ untuk $-3 \leq x \leq 3$ yang diputar terhadap sumbu- x .
3. Dapatkan panjang dari kurva parametrik $x = \cos 2t$, $y = \sin 2t$ pada interval $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
4. Hitung luas dari daerah irisan dua lingkaran $r = 4\cos\theta$ dan $r = 4\sin\theta$.
5. Tentukan semua koordinat polar pada *limacon* $r = 1 - \sin\theta$ yang memiliki garis singgung vertikal!

Pembahasan Kuis 2 Kalkulus 2 (43)

1. • Menentukan Area Luasan



- Ambil partisi vertikal sehingga diperoleh partisi tegak lurus sumbu putar.



- Menentukan Volume Benda Putar dengan menggunakan Rumus Volume Cakram

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^{\pi/4} \pi [(\cos x)^2 - (\sin x)^2] dx \\
 &= \pi \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \\
 &= \pi \int_0^{\pi/4} \cos 2x dx \\
 &= \pi \cdot \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi/4} \\
 &= \frac{\pi}{2} \left[\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right] \\
 &= \frac{\pi}{2} \text{ satuan volume}
 \end{aligned}$$

Jawab : $\boxed{\frac{\pi}{2} \text{ satuan luas}}$

2. • Menentukan turunan pertama

Diberikan fungsi $f(x) = y = \sqrt{16 - x^2} = (16 - x^2)^{\frac{1}{2}}$. Dengan menggunakan aturan rantai, turunan pertamanya adalah:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(16 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}} \cdot (-2x) \\ &= -\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}} \end{aligned}$$

- Menentukan kuadrat dari turunan pertama fungsi

Kemudian, kuadrat dari turunan pertamanya adalah:

$$[f'(x)]^2 = \left(-\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}} \right)^2 = \frac{x^2}{16 - x^2}$$

- Menentukan luas permukaan benda putar

Rumus luas permukaan benda putar yang diputar terhadap sumbu- x adalah:

$$K = \int_a^b 2\pi \cdot f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Substitusikan nilai $f(x)$, $[f'(x)]^2$, serta batas bawah $a = -3$ dan batas atas $b = 3$:

$$\begin{aligned} K &= \int_{-3}^3 2\pi \cdot \sqrt{16 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{16 - x^2}} dx \\ &= 2\pi \int_{-3}^3 \sqrt{16 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{(16 - x^2) + x^2}{16 - x^2}} dx \\ &= 2\pi \int_{-3}^3 \sqrt{16 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{16}{16 - x^2}} dx \\ &= 2\pi \int_{-3}^3 \cancel{\sqrt{16 - x^2}} \cdot \frac{\sqrt{16}}{\cancel{\sqrt{16 - x^2}}} dx \\ &= 2\pi \int_{-3}^3 4 dx \\ &= 2\pi \left[4x \right]_{-3}^3 \\ &= 2\pi \cdot 4 \left[x \right]_{-3}^3 \\ &= 8\pi (3 - (-3)) \\ &= 8\pi (3 + 3) \\ &= 8\pi (6) \\ &= 48\pi \end{aligned}$$

Jawab : 48π satuan luas.

3. • Turunan masing-masing komponen terhadap t adalah:

$$\frac{dx}{dt} = -2 \sin 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 2 \cos 2t.$$

- Persamaan Panjang Kurva Parametrik

$$S = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

- Dengan mensubstitusikan turunan yang diperoleh,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-2 \sin 2t)^2 + (2 \cos 2t)^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4(\sin^2 2t + \cos^2 2t)} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 dt. \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \\ &= 2 [t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Jawab : π satuan panjang.

4. • Menentukan titik potong

$$4 \cos \theta = 4 \sin \theta$$

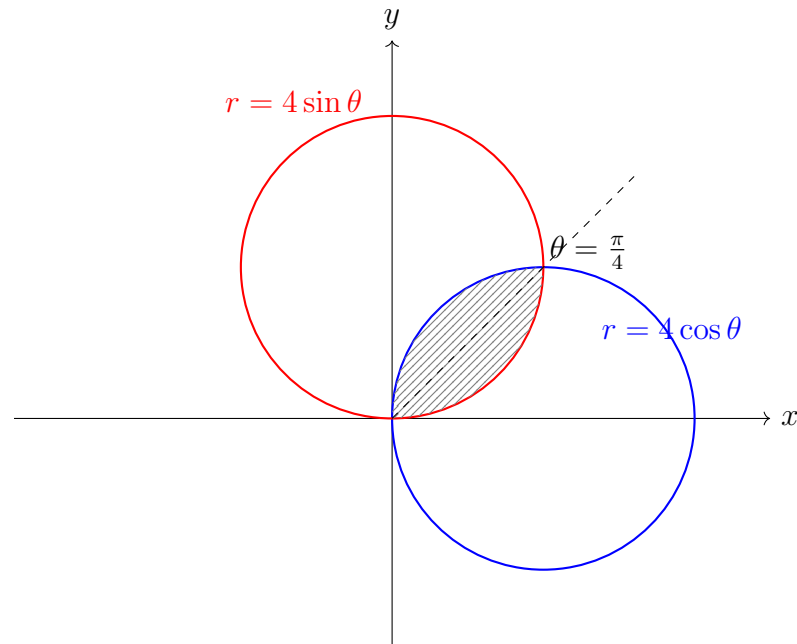
$$\tan \theta = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

- Menentukan letak titik penting pada koordinat kutub

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$r_1 = 4 \cos \theta$	4	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	2	0	-2	$-2\sqrt{3}$	-4
$r_2 = 4 \sin \theta$	0	2	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	4	$2\sqrt{3}$	2	0

- Gambar Grafik dalam koordinat kutub



- Daerah irisan bersifat simetris terhadap garis

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

Oleh karena itu, luas total daerah irisan dapat diperoleh dengan menghitung salah satu bagian, kemudian mengalikannya dengan 2.

$$L_{\text{total}} = 2 \times L_{\text{bawah}}$$

- Menentukan luas area bawah

$$\begin{aligned}
 L_{\text{bawah}} &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (4 \sin \theta)^2 d\theta \\
 &= 8 \int_0^{\pi/4} \sin^2 \theta d\theta \\
 &= 4 \int_0^{\pi/4} (1 - \cos 2\theta) d\theta \\
 &= 4 \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/4} \\
 &= 4 \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} - 0 \right] \\
 &= 4 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) \\
 &= \pi - 2.
 \end{aligned}$$

- Menentukan Luas Total

Sehingga, diperoleh luas totalnya adalah:

$$\begin{aligned}
 L_{total} &= 2 \times L_{bawah} \\
 &= 2 \times (\pi - 2) \\
 &= 2\pi - 4
 \end{aligned}$$

Jawab : $\boxed{2\pi - 4 \text{ satuan luas}}.$

5. • Diketahui kurva polar

$$r = 1 - \sin \theta.$$

Untuk kurva polar, gradien garis singgung dapat dihitung menggunakan parameter θ , yaitu

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}.$$

Agar garis singgung vertikal, penyebut harus bernilai nol sedangkan pembilang tidak boleh nol. Dengan kata lain,

$$\frac{dx}{d\theta} = 0, \quad \frac{dy}{d\theta} \neq 0.$$

- Ubah persamaan polar ke bentuk parametrik menggunakan

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Karena $r = 1 - \sin \theta$, diperoleh

$$x = (1 - \sin \theta) \cos \theta,$$

$$y = (1 - \sin \theta) \sin \theta.$$

- Turunkan masing-masing persamaan parametrik terhadap θ .
Untuk x ,

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{d\theta} &= (-\cos \theta) \cos \theta + (1 - \sin \theta)(-\sin \theta) \\
 &= -\cos^2 \theta - \sin \theta + \sin^2 \theta.
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan identitas $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$, diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{d\theta} &= \sin^2 \theta - (1 - \sin^2 \theta) - \sin \theta \\
 &= 2\sin^2 \theta - \sin \theta - 1.
 \end{aligned}$$

Untuk y ,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta} &= (-\cos \theta) \sin \theta + (1 - \sin \theta) \cos \theta \\ &= -\sin \theta \cos \theta + \cos \theta - \sin \theta \cos \theta \\ &= \cos \theta(1 - 2 \sin \theta).\end{aligned}$$

- Agar garis singgung vertikal, harus berlaku

$$\frac{dx}{d\theta} = 0.$$

Sehingga

$$2 \sin^2 \theta - \sin \theta - 1 = 0.$$

Misalkan

$$u = \sin \theta,$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned}2u^2 - u - 1 &= 0 \\ (2u + 1)(u - 1) &= 0.\end{aligned}$$

Jadi,

$$u = -\frac{1}{2} \quad \text{atau} \quad u = 1.$$

Dengan demikian

$$\sin \theta = -\frac{1}{2}$$

Sehingga diperoleh bahwa nilai dari θ

$$\theta = 210^\circ, 330^\circ,$$

sedangkan

$$\sin \theta = 1$$

memberikan

$$\theta = 90^\circ.$$

- Selanjutnya periksa syarat kedua, yaitu

$$\frac{dy}{d\theta} \neq 0.$$

Untuk $\theta = 90^\circ$,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta} &= \cos 90^\circ (1 - 2 \sin 90^\circ) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Karena $\frac{dy}{d\theta} = 0$, maka $\theta = 90^\circ$ tidak menghasilkan garis singgung vertikal.

Untuk $\theta = 210^\circ$,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta} &= \cos 210^\circ (1 - 2 \sin 210^\circ) \\ &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) (1 + 1) \\ &= -\sqrt{3} \neq 0.\end{aligned}$$

Untuk $\theta = 330^\circ$,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta} &= \cos 330^\circ (1 - 2 \sin 330^\circ) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) (1 + 1) \\ &= \sqrt{3} \neq 0.\end{aligned}$$

Jadi nilai θ yang memenuhi syarat garis singgung vertikal adalah

$$\theta = 210^\circ \quad \text{dan} \quad \theta = 330^\circ.$$

- Cari nilai r yang bersesuaian.

Untuk $\theta = 210^\circ$,

$$\begin{aligned}r &= 1 - \sin 210^\circ \\ &= 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Untuk $\theta = 330^\circ$,

$$\begin{aligned}r &= 1 - \sin 330^\circ \\ &= 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

- Oleh karena itu, koordinat polar yang memiliki garis singgung vertikal adalah

$$\left(\frac{3}{2}, 210^\circ\right) \text{ dan } \left(\frac{3}{2}, 330^\circ\right)$$

Jawab : $\left[\left(\frac{3}{2}, 210^\circ\right) \mid \left(\frac{3}{2}, 330^\circ\right)\right].$